Il suono dei numeri Reali

Sulle tracce di Pitagora come guida non solo alla scoperta dei numeri irrazionali, ma anche degli stretti legami tra matematica e musica.

Lavoro svolto dagli allievi di cinque classi del biennio liceale Linguistico e Scientifico, coadiuvati dal docente di matematica, avvalendosi della consulenza di un insegnante di musica e con l'ausilio dei seguenti strumenti informatici: lavagna interattiva, connessione internet e posta elettronica per il lavoro di gruppo; Microsoft Word per la stesura del documento; Microsoft Excel per i calcoli nelle tabelle; GeoGebra4 per i grafici; MuseScore_1.1 per gli spartiti e per l'ascolto.

1. Il suono dei numeri Razionali

Il primo suono al quale, convenzionalmente, attribuiamo il nome di "Do" si può ottenere, facendo vibrare una corda 16,35 volte al secondo o, come si usa dire in Fisica, con una frequenza di circa 16,35 hertz.
Questo Do è difficilmente udibile dall'orecchio umano che normalmente percepisce suoni a partire dai 20 hertz. Inoltre solo alcuni particolari organi a canne riescono a riprodurlo anche se in realtà provocano in chi ascolta più una sensazione di risonanza che la percezione di un suono. E' per questo motivo che il Do più basso sul pianoforte non è questo, ma quello che si ottiene in corrispondenza di una vibrazione pari a circa 32,7 hertz. Sempre per lo stesso motivo, il Do centrale è generalmente indicato come il quarto sulla tastiera e per questo lo indichiamo con "Do4" anche se è il quinto Do nella soglia dell'udibile.

In realtà non si dovrebbe mai parlare di una nota singola prodotta da una certa frequenza, ma di una banda di suoni, cui la nota appartiene, prodotta da un certo intervallo di frequenze[1], perché le frequenze, misurando la vibrazione della corda, misurano in definitiva l'altezza del suono attraverso numeri che non si fa fatica ad identificare con numeri Reali. Invece, le note che produciamo con gli strumenti musicali o che emettiamo con le corde vocali, appartengono a un insieme finito e discreto. Ricapitolando: l'insieme di tutte le frequenze possibili, tenuto conto anche di quelle che producono suoni troppo bassi o troppo alti per essere uditi dal nostro orecchio, ha la potenza del continuo ed è teoricamente infinito, cioè contiene lo stesso numero di elementi dell'insieme dei numeri Reali, mentre l'insieme delle note corrisponde a un sottoinsieme finito dell'insieme dei numeri Naturali e contiene un numero di elementi variabile a seconda dello strumento musicale che utilizziamo. In questo momento, emulando i pitagorici, immaginiamo di utilizzare uno strumento costituito da una sola corda: un monocordo. Si tratta di una cassa

[1] Per questo motivo non considereremo, almeno per il momento e finché rimarremo sulle scale pitagoriche, né i diesis, né i bemolle. Un Do# sarà omologato come appartenente alla banda del Do, con frequenza più alta rispetto al centro della banda che produce i Do e un Re*b* come appartenente alla bada del Re, ma con frequenza minore rispetto al centro della banda che produce i Re.

armonica a forma di parallelepipedo su cui è fissata una corda di lunghezza L la cui tensione può essere fatta variare girando una chiavetta, vedi Fig. 1:

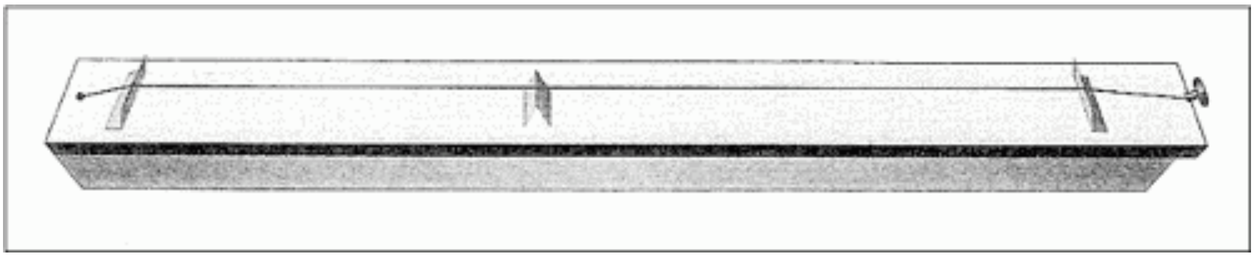

Fig. 1 – Il monocordo

Inizialmente accordiamo il monocordo in modo tale che la corda produca un Do4. Se si dimezza la corda L del monocordo introducendo un ponticello nel centro del monocordo, le due metà della corda, pizzicate sempre con la stessa forza, vibrano con frequenza doppia rispetto a quella iniziale, producendo ancora un suono simile al Do, ma più acuto, un Do dell'ottava superiore: Do5. Si otterrebbe ancora un altro Do se si potesse raddoppiare la lunghezza della corda, ma in tal caso la corda, pizzicata sempre nello stesso modo, vibrerebbe con frequenza dimezzata, emettendo un suono più basso, un Do dell'ottava inferiore: Do3. La frequenza con cui la corda vibra è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda L. E' per questo motivo che i pianoforti a coda sono più lunghi sul lato sinistro, lato su cui si suonano le note con i suoni più bassi. La frequenza con cui la corda vibra è inoltre direttamente proporzionale alla radice quadrata della tensione T e inversamente proporzionale alla radice quadrata del prodotto tra la densità σ del materiale di cui la corda è fatta e la sua sezione S. I Pitagorici scoprirono tutti questi rapporti attraverso la pratica, ma è del 1700 la formula fisica che li riassume tutti:

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\sigma S}}$$

e che permette di costruire strumenti a corda di lunghezza accettabile, variando lo spessore e il materiale delle corde e non solo la loro lunghezza.
Ipotizziamo di usare un monocordo la cui corda sia fatta di un materiale di densità σ e sezione S e sia sottoposta sempre alla stessa tensione T. In definitiva, non dovendo costruire uno strumento reale, ma potendone immaginare uno ideale, faremo variare solo la lunghezza L della corda. Nella seguente tabella, sono riportate le lunghezze della corda che vibrando emette sempre un suono omologabile come un Do, riproducibile sulla tastiera di un pianoforte e avente come unità di misura la lunghezza L che vibrando emette un Do1:

Tab. n.1 – La successione dei Do

Lunghezze della corda	Frequenza della vibrazione in hertz	Suono prodotto
L	16,35 · 2 = 32,70	Do1
L/2	32,70 · 2 = 65,40	Do2
L/4	65,40 · 2 = 130,80	Do3
L/8	130,80 · 2 = 261,60	Do4 centrale
L/16	261,60 · 2 = 523,20	Do5
L/32	523,20 · 2 = 1046,40	Do6
L/64	1046,40 · 2 = 2092,80	Do7
L/128	2092,80 · 2 = 4185,60	Do8

In un moderno pentagramma per pianoforte i Do così trovati si rappresentano nel seguente modo:

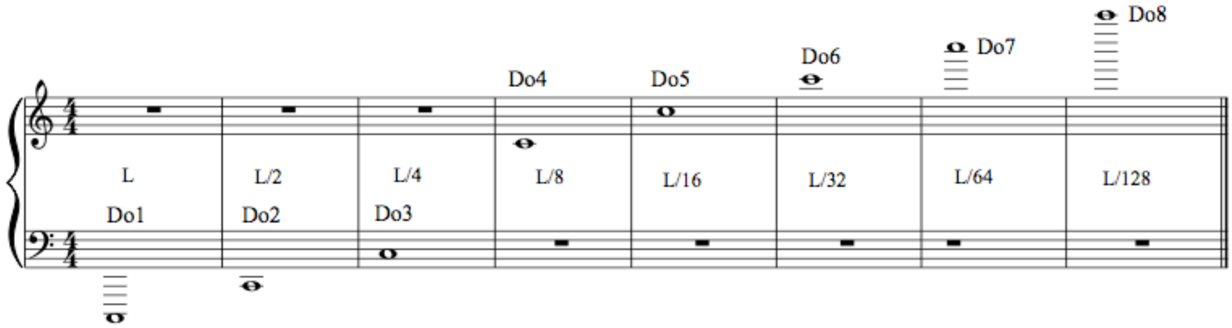

Fig. 2 – I Do sul pentagramma del pianoforte.

Per passare da un Do all'altro bisogna contare 8 note: Do1, Re1, Mi1, Fa1, Sol1, La1, Si1, Do2. Per questo si parla di ottave:

Tab. n.2 – Gli intervalli di frequenza delle ottave

Lunghezze della corda	Intervallo di frequenze in hertz	Ottave
L	(32,70; 65,40)	prima
L/2	(65.40; 130,80)	seconda
L/4	(130,80; 261,60)	terza
L/8	(261,60; 523,20)	quarta
L/16	(523,20; 1046,40)	quinta
L/32	(1046,40; 2092,80)	sesta
L/64	(2092,80; 4185,60)	settima
L/128	(4185,60; …)	ottava

Le funzioni in gioco in questo fenomeno sono 3:

a) la frequenza y con cui vibra la corda in funzione della sua lunghezza x:

$$y = \frac{32.70}{2x}$$

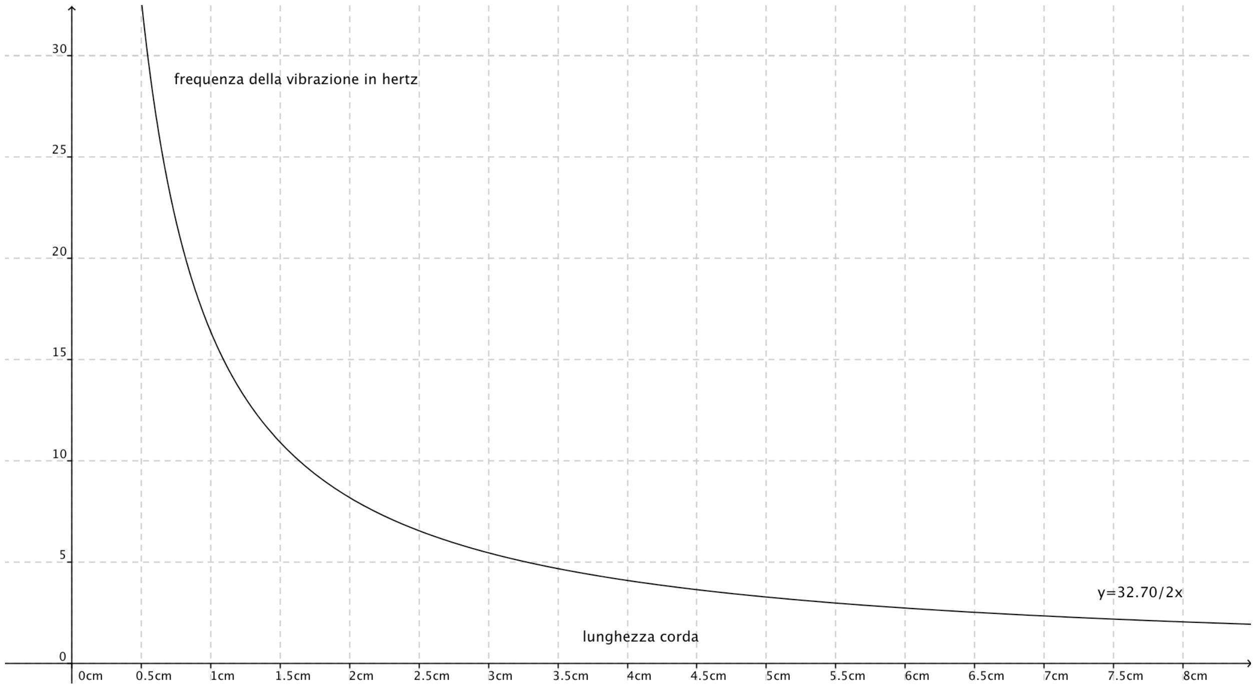

Fig.3 – La curva di proporzionalità inversa tra frequenza del suono e lunghezza della corda

b) la frequenza y in funzione dei Do assunti come x:

$$y = 32.70 \bullet 2^x$$

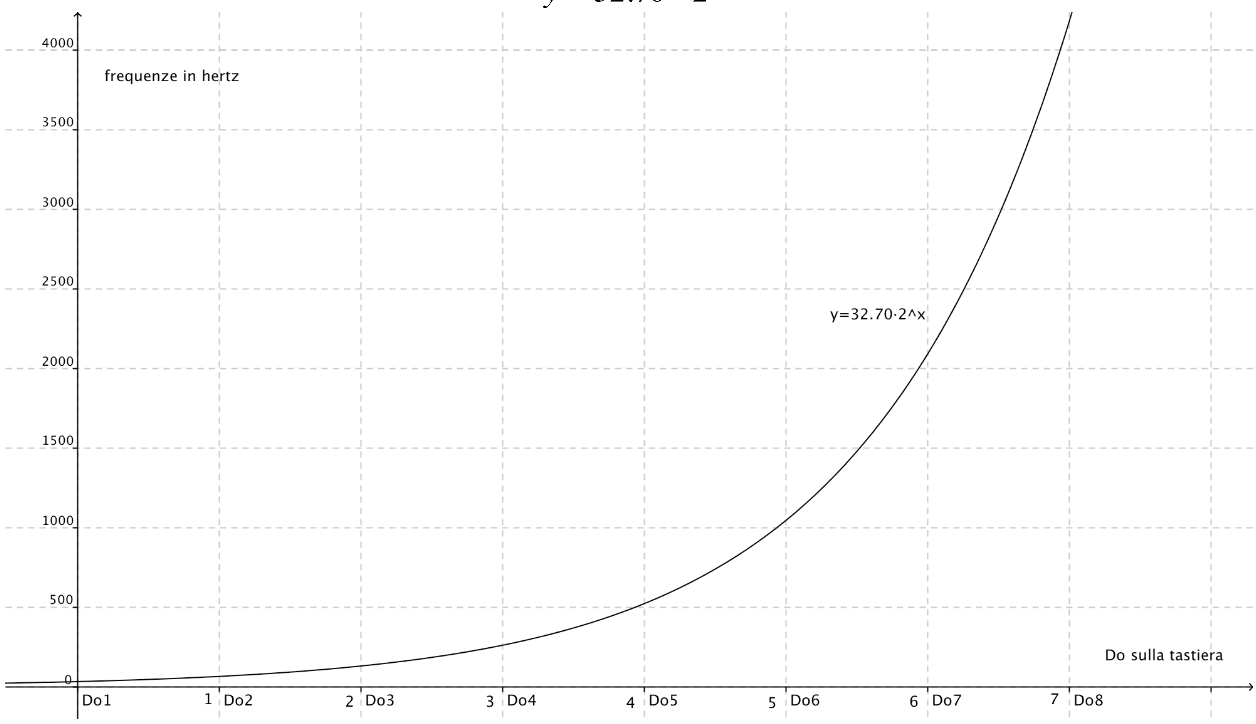

Fig. 4 – La curva esponenziale crescente in base 2 lungo la quale si dispongono le frequenze dei Do

c) la lunghezza y della corda in funzione dei Do assunti come x:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

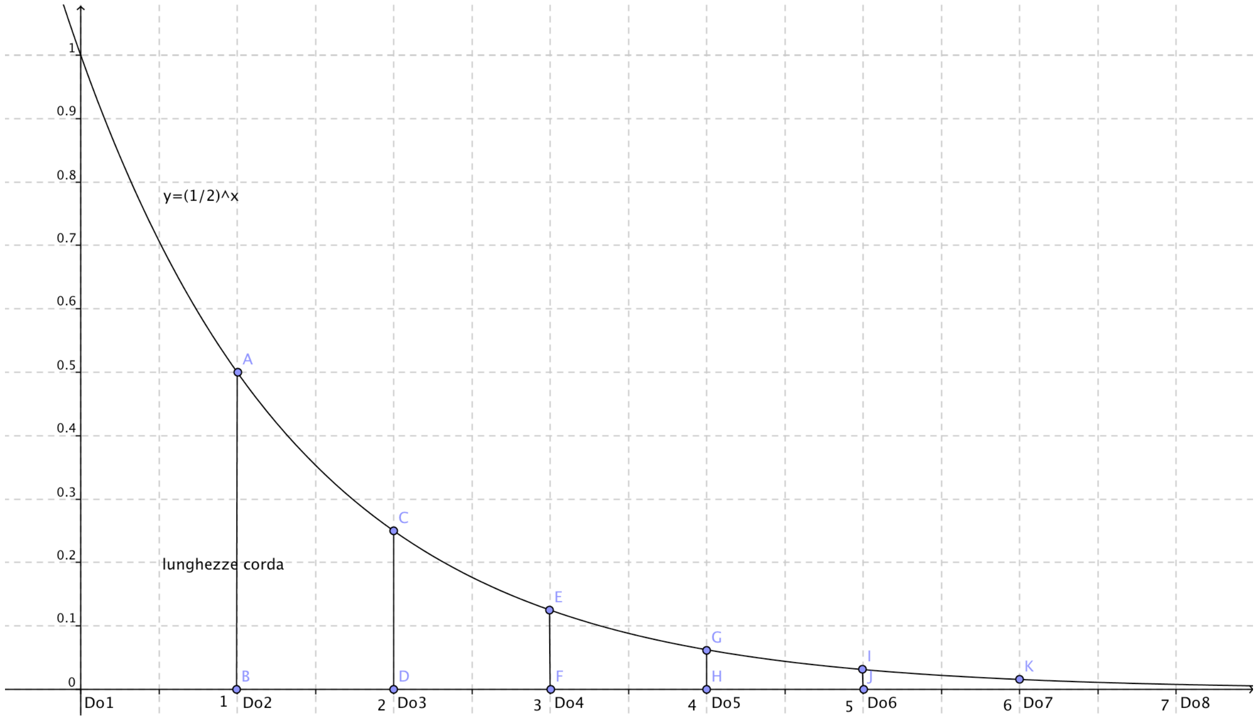

Fig. 5 – La curva esponenziale decrescente in base ½ tra lughezza della corda e suoni Do emessi

Come si fa a ottenere suoni diversi dal Do?

Invece di dividere la corda per potenze di 2, proviamo a dividerla per potenze di 3, nel più puro spirito della scuola pitagorica, che riconosceva particolari poteri escatologici solo ai numeri 1, 2, 3, 4.

Dividendo per 3 la lunghezza della corda che vibrando produce il Do1, si ottiene un nuovo suono, detto convenzionalmente Sol, appartenente all'ottava immediatamente superiore e che per questo motivo indicheremo con Sol2. La frequenza prodotta dalla corda sarà tripla rispetto a quella del Do1 perché la frequenza è sempre inversamente proporzionale alla lunghezza della corda. Continuando a dividere la corda per le successive potenze del 3 si trovano le frequenze di altre note: Re4, La5 e Mi7. Così come descritto nella seguente tabella:

Tab. n.3 – La successione delle frequenze per suddivisioni in base 3 della corda

Lunghezze della corda	Frequenza della vibrazione in hertz	Suono prodotto
L/3	32,70 · 3 = 98	Sol2
L/9	32,70 · 9 = 293	Re4
L/27	32,70 · 27 = 882	La5
L/81	32.70 · 81 = 2646	Mi7

Sul pentagramma per pianoforte:

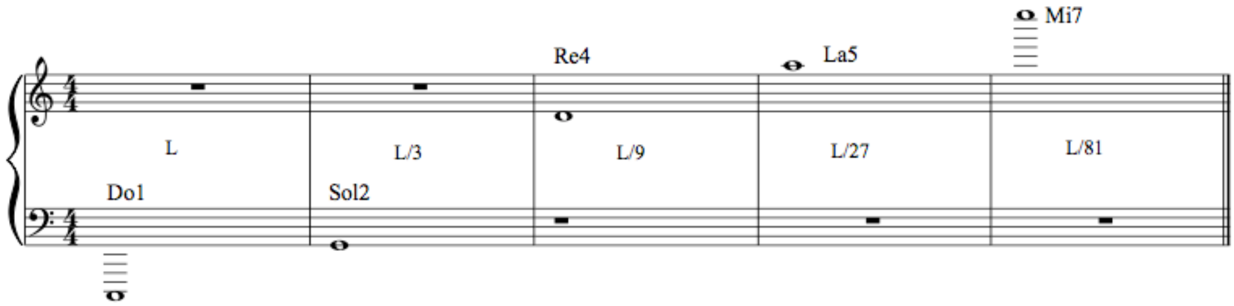

Fig. 6 – Le note per suddivisioni della corda per potenze del 3

Se moltiplico la corda che ha prodotto ciascuno di questi suoni per 2, li abbasso di un'ottava; se divido per 2 la corda, li alzo di un'ottava perché, come abbiamo visto, la frequenza di uno stesso suono è inversamente proporzionale al doppio della lunghezza della corda:

Tab. n.4 – Il passaggio alle ottave inferiori e superiori

Suono di partenza	Suono dell'ottava inferiore	Suono dell'ottava superiore
Sol2 = 98 hertz	Sol1 = 98 : 2 = 49 hertz	Sol3 = 98 · 2 = 196 hertz
Re4 = 293 hertz	Re3 = 293 : 2 = 146 hertz	Re5 = 293 · 2 = 586 hertz
La5 = 882 hertz	La4 = 882 : 2 = 441 hertz	La6 = 882 · 2 = 1764 hertz
Mi7 = 2646 hertz	Mi6 = 2646 : 2 = 1323 hertz	Mi8 = troppo alto

Sul pentagramma per pianoforte:

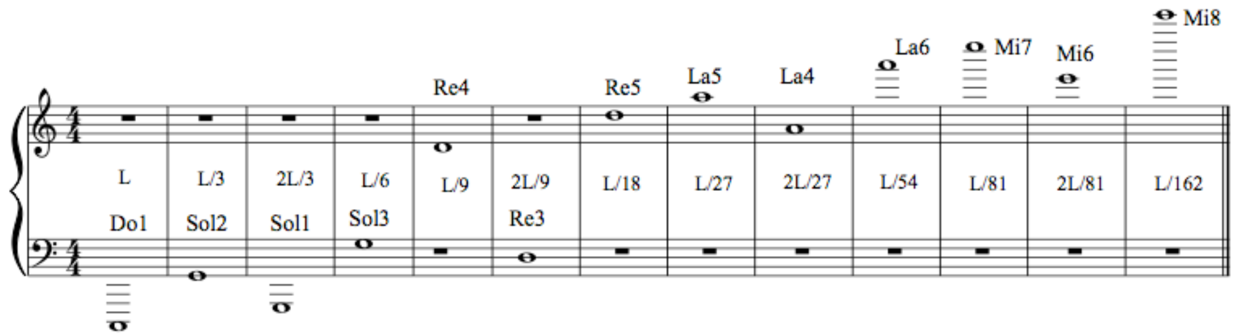

Fig. 7 – Le note delle ottave inferiori e superiori

Ora siamo in grado di calcolare i Do, Re, Mi, Sol, La di ogni ottava.
Mancano ancora all'appello i Fa e i Si.

Per ottenere un Fa i pitagorici moltiplicavano per 3/4 la lunghezza della corda che produce il corrispondente Do; quindi per ottenere le frequenze dei Fa corrispondenti, basterà moltiplicare la frequenza di ogni Do già noto per 4/3, come indicato nella seguente tabella:

Tab. n.5 – La successione dei Fa

Lunghezze della corda	Frequenza della vibrazione in hertz	Suono prodotto
3L/4	32,70 · 4/3 = 43.60	Fa1
3L/8	65,40 · 4/3 = 87,2	Fa2
3L/16	130,80 · 4/3 = 174	Fa3
3L/32	261,60 · 4/3 = 349	Fa4
3L/64	523,20 · 4/3 = 697,60	Fa5
3L/128	1046,40 · 4/3 = 1395	Fa6
3L/256	2092,80 · 4/3 = 2790	Fa7

Sul pentagramma:

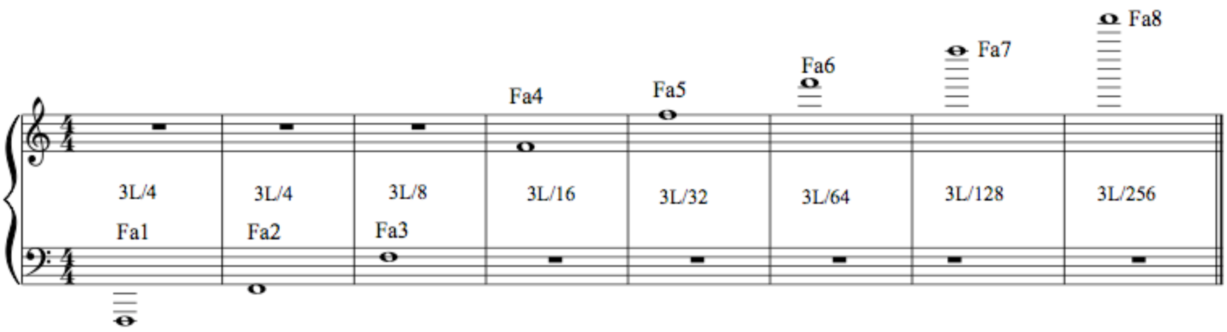

Fig. 8 – La successione dei Fa

Restano da calcolare le frequenze dei Si che i pitagorici ottenevano moltiplicando per $128=2^7$ la corda di un Do e dividendola per $243=3^5$. Quindi, passando alle frequenze, basterà moltiplicare la frequenza del Do corrispondente, per 243/128:

Tab. n.6 – La successione dei Si

Lunghezze della corda	Frequenza della vibrazione in hertz	Suono prodotto
128L/243	32,70 · 243/128 = 62	Si1
64L/243	65,40 · 243/128 = 124	Si2
32L/243	130,80 · 243/128 = 248	Si3
16L/243	261,60 · 243/128 = 496	Si4
8L/243	523,20 · 243/128 = 993	Si5
4L/243	1046,40 · 243/128 = 1986	Si6
2L/243	2092,80 · 243/128 = 3973	Si7

Sul pentagramma:

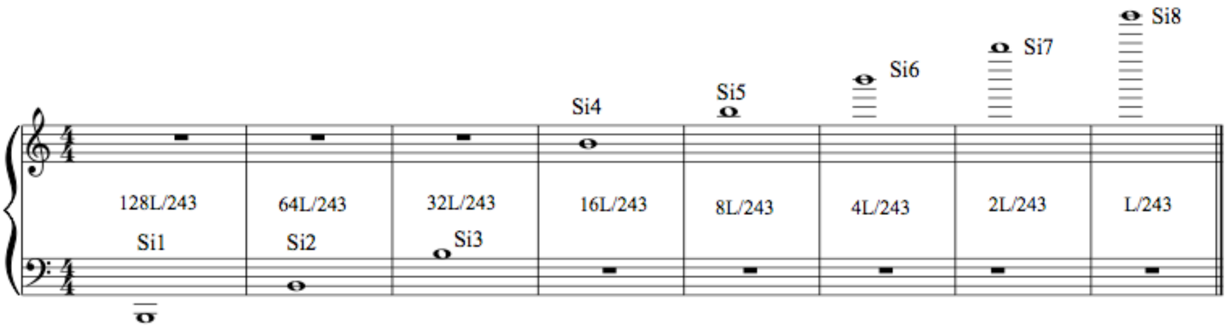

Fig. 9 – La successione dei Si

2. I numeri stonati della scala pitagorica

Proviamo a moltiplicare per 3/2 la frequenza del Do1 e poi ancora per 3/2 e così via per tutte le potenze di 3/2, come indicato nella Tab n.7, nella quale sono riportati tutti i valori che è possibile trovare con questo sistema, senza superare il Do8 perché altrimenti si uscirebbe dalla tastiera:

Tab. n.7 – La successione delle note di quinta in quinta

Lunghezze crescenti della corda	Frequenza della vibrazione in hertz	Suono prodotto	V nota ascendente	V nota discendente
L	16,35 · 2 = 32,70	Do1	Sol1	Fuori tastiera
L · 2/3	32,70 · 3/2 = 49	Sol1	Re2	Do1
$L \cdot (2/3)^2$	49 · 3/2 = 73,5	Re2	La2	Sol1
$L \cdot (2/3)^3$	73,5 · 3/2 = 110	La2	Mi3	Re2
$L \cdot (2/3)^4$	110 · 3/2 = 165	Mi3	Si3	La2
$L \cdot (2/3)^5$	165 · 3/2 = 247	Si3	Fa4	Mi3
$L \cdot (2/3)^6$	247 · 3/2 = 370	Fa4	Do5	Si3
$L \cdot (2/3)^7$	370 · 3/2 = 555	Do5	Sol5	Fa4
$L \cdot (2/3)^8$	555 · 3/2 = 832	Sol5	Re6	Do5
$L \cdot (2/3)^9$	832 · 3/2 = 1248	Re6	La6	Sol5
$L \cdot (2/3)^{10}$	1248 · 3/2 = 1872	La6	Mi7	Re6
$L \cdot (2/3)^{11}$	1872 · 3/2 = 2808	Mi7	Si7	La6
$L \cdot (2/3)^{12}$	2808 · 3/2 = 4212	Si7	Troppo alto	Mi7

Sul pentagramma:

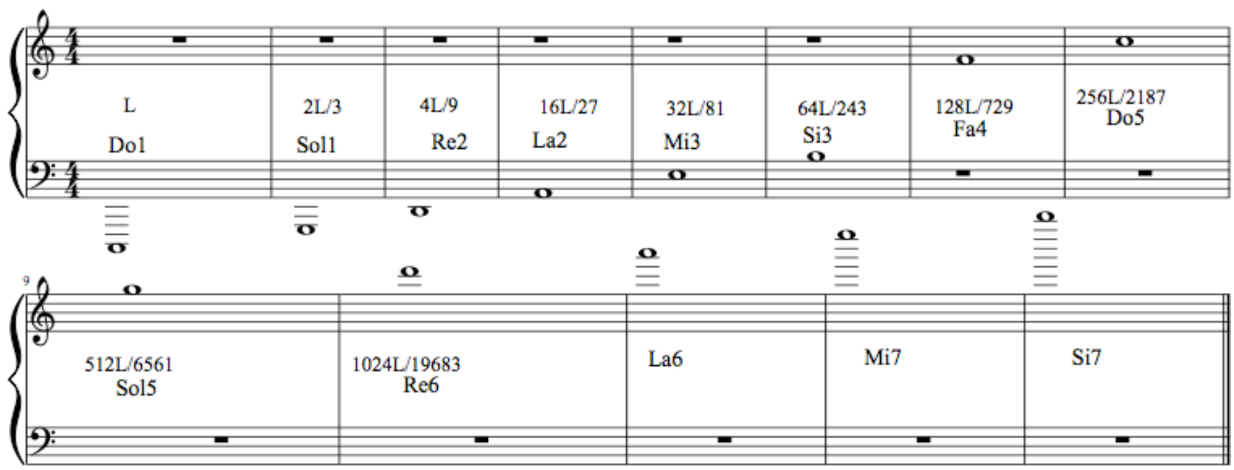

Fig. 10 – Le note di quinta in quinta

Le note che abbiamo così calcolato distano sempre l'una dall'altra di 5 posti nella successione naturale delle note: Do, Re, Mi Fa, Sol La, Si. Si dice, per questo, che distano tra loro intervalli di quinta e formano quello che in teoria musicale si chiama il "circolo delle quinte".

Questo circolo dovrebbe permettere di riottenere gli stessi valori di frequenza già ottenuti con altri metodi perché i valori delle note non dovrebbero cambiare a seconda del metodo usato per calcolarle.

Ma quando si arriva a calcolare la frequenza del Do5, ci si accorge che rispetto al Do5, calcolato col sistema del passaggio alle ottave, cioè moltiplicando per potenze di 2, c'è uno sfasamento infatti:

$$Do5 = Do1 \cdot 2^5 = 523 \text{ hertz}$$

A differenza di

$$Do5 = Do1 \cdot (2/3)^6 = 555 \text{ hertz}$$

Essendo: $(2/3)^6 \neq 2^5$

Nella scala pitagorica esiste dunque un errore dovuto al fatto che per passare da un'ottava all'altra bisogna dividere o moltiplicare la corda di partenza usando le potenze di 2 e quindi muovendosi lungo una curva esponenziale, mentre per passare da una nota all'altra all'interno della stessa ottava si deve moltiplicare o dividere la corda per dei parametri fissi trovati sperimentalmente.

Ad esempio, se si vogliono ottenere tutte e sole le note appartenenti all'ottava centrale del piano, dal Do4 al Si4, si procede per quinte e per ottave nel seguente modo:

1) si parte dalla frequenza del Do4 = 261,60 hertz
2) si calcola la frequenza della sua quinta (Do4-Re4-Mi4-Fa4-**Sol4**), moltiplicando la frequenza del Do4 per 3/2 otteniamo 392,40 hertz (= 3/2 di Do4) che è la frequenza di un Sol4;
3) si calcola la quinta di Sol4 (Sol4-La4-Si4-Do5-**Re5**), moltiplicando la frequenza del Sol4 per 3/2 otteniamo 1177,20 hertz (= 3/2 di Sol4 = 9/4 di Do4) che è la frequenza di un Re5;
4) siccome questo Re5 si trova in una ottava superiore rispetto all'ottava che vogliamo, per ottenere il Re4 dobbiamo dividere la sua frequenza a metà: ¾ di Sol4 = 9/8 di Do4;
5) continuiamo così per tutte le altre note ottenendo la seguente tabella:

Tab. n.8 – Le note della quarta ottava secondo i pitagorici

misura corda rispetto alla lunghezza Do4	Frequenza della vibrazione in hertz	Suono prodotto	V nota ascendente	V nota discendente
L4	261,60	Do4	Sol4	Fuori ottava
L4 · 8/9	261,60 · 9/8 = 294,30	Re4	La4	Fuori ottava
L4 · 64/81	261,60 · 81/64 = 331,08	Mi4	Si4	Fuori ottava
L4 · 3/4	261,60 · 4/3 = 348,80	Fa4	Fuori ottava	Fuori ottava
L4 · 2/3	261,60 · 3/2 = 392,40	Sol4	Fuori ottava	Do4
L4 · 16/27	261,60 · 27/16 = 441,45	La4	Fuori ottava	Re4
L4 · 128/243	261,60 · 243/128 = 496,63	Si4	Fuori ottava	Mi4

Disponendo le note così ottenute in un sistema di assi cartesiani nel quale sull'asse y siano riportate le frequenze, si ottiene un grafico per punti discreti come nella seguente figura:

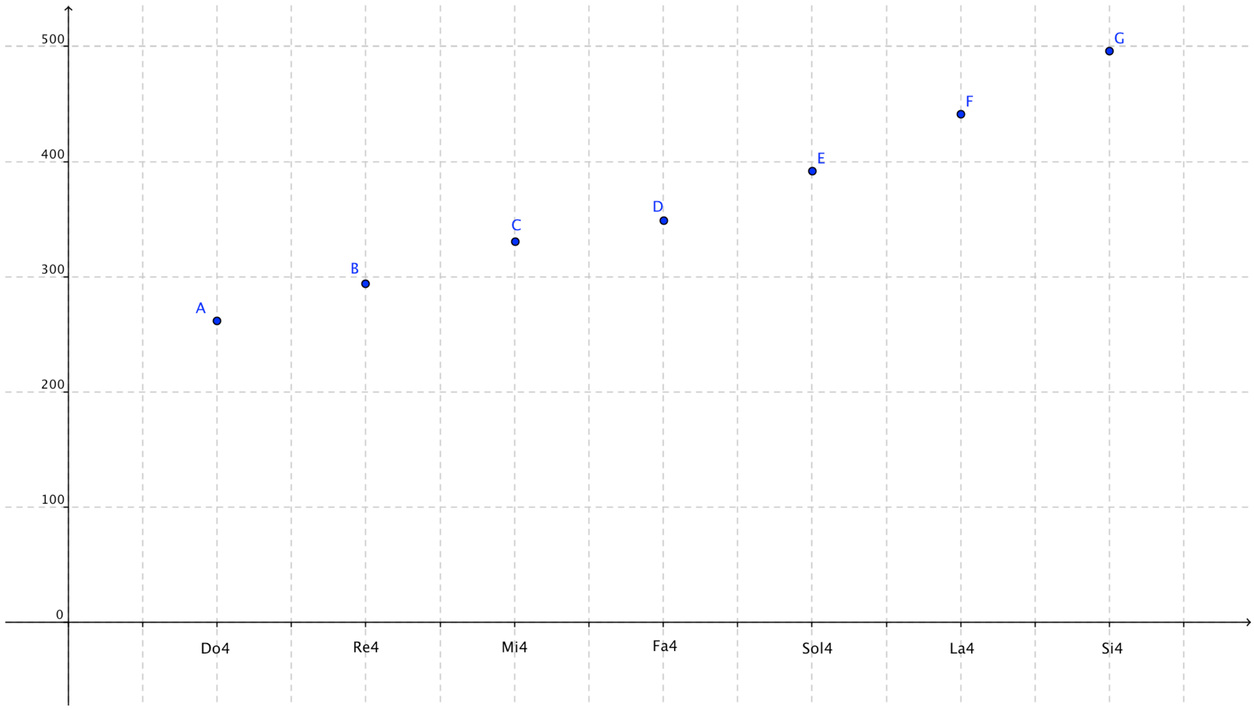

Fig. 11 – Il grafico delle frequenze delle note dell'ottava centrale

Come si vede, le frequenze trovate dai pitagorici, non si distribuiscono lungo una curva algebrica regolare, ma costituiscono una successione crescente di valori discreti.
Ricapitolando: le frequenze delle note, se consideriamo solo i Do, crescono poggiandosi su una curva esponenziale in base 2:

$$y = 2^x$$

ma tra un Do e l'altro l'andamento delle frequenze cambia e assume quello di una successione i cui elementi si calcolano moltiplicando la frequenza del Do di riferimento per i termini della successione:

$$\frac{9}{8};\frac{81}{64};\frac{4}{3};\frac{3}{2};\frac{27}{16};\frac{243}{128}$$

e quindi non è possibile ottenere il grafico di un'unica curva che rappresenti la frequenza delle note presenti in tutte le ottave.
Per giunta è possibile ottenere per ogni nota due diversi valori a seconda del metodo che si usi per calcolarle. Perché una potenza di 2 suona diversamente da una frazione ottenuta dividendo potenze di 3 per potenze di 2. La natura di questi numeri non è evidentemente la stessa!

3. I numeri di Zarlino

Il veneziano Zarlino nel 1558 riuscì a far accettare la proposta di Archita, risalente al IV sec. a C., di sostituire le frazioni 81/64, 27/16 e 243/128 rispettivamente con 5/4, 5/3 e 15/8, numeri che i pitagorici non avevano voluto prendere in considerazione perché contenenti il 5, numero secondo loro non adatto a rappresentare l'armonia delle sfere celesti.

In definitiva Zarlino e Archita non fecero che attribuire al Mi6 una frequenza cinque volte maggiore di quella del Do4, usando una corda lunga un quinto di quella necessaria per ottenere il Do4.
Poi dal Mi6, ricavarono il Mi5 dividendo a metà la frequenza di Mi6. In questo modo la frequenza di Mi5 risultava pari ai 5/2 di quella del Do4. Dimezzando la frequenza del Mi5 ottennero il Mi4 o, il che è lo stesso, trovarono il Mi4 calcolando i 5/4 della frequenza del Do4:

$$\text{frequenza di Mi4} = (5/4) \cdot \text{frequenza di Do4}$$

Dividendo la frequenza di Mi5 per 3/2 ottennero la frequenza della sua quinta discendente La4 avente frequenza pari ai 5/3 di quella del Do4:

$$\text{frequenza di La4} = (5/3) \cdot \text{frequenza di Do4}$$

Infine, moltiplicando per 3/2 la frequenza di Mi4 ottennero la frequenza della quinta ascendente Si4 avente frequenza pari ai 15/8 della frequenza del Do4:

$$\text{frequenza di Si4} = (15/8) \cdot \text{frequenza di Do4}$$

L'errore dovuto al salto da un'ottava all'altra secondo le potenze del 2 non fu per questo risolto, ma almeno gli accordatori poterono lavorare con numeri più piccoli e calcolare la lunghezza delle corde più facilmente.

Tab. n.9 – Le note della quarta ottava secondo Zarlino

corda riferita alla misura del Do4	Frequenza in hertz	Suono prodotto	V nota ascendente	V nota discendente
L4	261,60	Do4	Sol4	Fuori ottava
L4 · 8/9	261,60 · 9/8 = 294,30	Re4	La4	Fuori ottava
L4 · 4/5	261,60 · 5/4 = 327	Mi4	Si4	Fuori ottava
L4 · 3/4	261,60 · 4/3 = 348,80	Fa4	Fuori ottava	Fuori ottava
L4 · 2/3	261,60 · 3/2 = 392,40	Sol4	Fuori ottava	Do4
L4 · 3/5	261,60 · 5/3 = 436	La4	Fuori ottava	Re4
L4 · 8/15	261,60 · 15/8 = 490,50	Si4	Fuori ottava	Mi4

Sul pentagramma:

Fig. 12 – Le note della quarta ottava

Come si nota, alcune delle frequenze trovate da Zarlino cambiano rispetto a quelle di Pitagora, ma per quanto detto a proposito delle bande di frequenza, questo non deve preoccupare un musicista che nella scelta della nota si lascia guidare dall'orecchio e non certo da calcoli matematici. Inoltre il grafico di Fig. 11 resta esattamente lo stesso anche per la scala di Zarlino, perché i numeri decimali che corrispondono alle frazioni in oggetto e cioè quelle del Mi, del La e del Si sono uguali se approssimate alla prima cifra decimale.

Per porre un freno all'arbitrarietà della scelta della nota giusta, fatta per lo più a orecchio, nel 1880 si fissò a 440 hertz la frequenza della nota La4 in base alla quale si devono poi accordare tutte le altre note. Questo non significa che da allora in poi tutti gli strumenti e tutte le orchestre suoneranno il La centrale con la stessa frequenza, ma almeno suoneranno le note con una frequenza non troppo dissimile gli uni dagli altri.
Nella tabella seguente le due scale a confronto.

Tab. n.10 – Pitagora e Zarlino a confronto

Suono prodotto	Frequenze della scala di Pitagora	Frequenze della scala di Zarlino
Do4	261,60	261,60
Re4	261,60 · 9/8 = 294,30	261,60 · 9/8 = 294,30
Mi4	261,60 · 81/64 = 331,08	261,60 · 5/4 = 327
Fa4	261,60 · 4/3 = 348,80	261,60 · 4/3 = 348,80
Sol4	261,60 · 3/2 = 392,40	261,60 · 3/2 = 392,40
La4	261,60 · 27/16 = 441,45	261,60 · 5/3 = 436
Si4	261,60 · 243/128 = 496,63	261,60 · 15/8 = 490,50

4. Il suono dei numeri irrazionali

Bisogna aspettare la fine del 1600 per vedere risolto il problema della scala pitagorica e della scala naturale di Zarlino, quando l'organista tedesco Werckmeister propose di dividere ogni ottava in 12 semitoni perfettamente uguali. Prima di lui un tono era diviso in 9 parti dette comma e 4 comma facevano un bemolle della nota successiva mentre 5 comma facevano un diesis della nota precedente, secondo il seguente schema:

(frequenza del Re - frequenza del Do)/9 = un comma

frequenza del Do + 4 comma = frequenza del Re*b*,

frequenza del Do + 5 comma = frequenza del Do#,

frequenza del Do + 9 comma = frequenza del Re

Per esempio, consideriamo le frequenze del Do4 e del Re4 nella scala di Zarlino per calcolare la frequenza di un comma:

$$(293 - 261) : 9 = 32 : 9 = 3{,}55 \text{ hertz}$$

aggiungendo 4 comma alla frequenza del Do4 otteniamo la frequenza del Re*b*:

$$261 + 4 \cdot 3{,}55 = 275{,}20 \text{ hertz}$$

aggiungendo 5 comma alla frequenza del Do4 otteniamo la frequenza del Do#:

$$261 + 5 \cdot 3{,}55 = 278{,}75 \text{ hertz}$$

aggiungendo 9 comma alla frequenza del Do4 otteniamo la frequenza del Re:

$$261 + 9 \cdot 3{,}55 = 292{,}95 \text{ hertz}$$

Werckmeister riuscì a far accettare ai suoi contemporanei la divisione del tono esattamente a metà in modo che i bemolle e i diesis coincidessero, come d'altronde avviene su tutti gli strumenti a tastiera (non dimentichiamo che lui era un organista). A questo punto si trovava a contare 12 semitoni all'interno di ogni ottava e, sapendo ormai per certo che il suono si propaga con frequenza esponenziale, concluse che ciò dovesse avvenire anche all'interno di ciascuna ottava e non solo nel passare da un'ottava all'altra.

Ma quale doveva essere la frequenza di un singolo semitono? Visto che i semitoni sarebbero stati tutti uguali, si poteva calcolare la loro frequenza a partire da una qualunque ottava. La distanza tra due ottave è sempre di 2 hertz e dentro a un'ottava ci sono 12 semitoni la cui frequenza sale esponenzialmente. Se il primo semitono della prima ottava ha frequenza h, il secondo avrà frequenza h^2, il terzo h^3, il quarto h^4 e così via fino ad arrivare all'ultimo che avrà frequenza h^{12}. L'ultimo semitono però deve avere la stessa frequenza del primo suono dell'ottava successiva (finalmente!) e quindi nel passare dalla prima ottava alla seconda, deve coincidere con 2:

$$\mathbf{h^{12} = 2}$$

Geniale!
Ora è possibile conoscere quale sia la frequenza di un singolo semitono, applicando l'operazione inversa di elevamento a potenza:

$$\mathbf{h} = \sqrt[12]{2}$$

Questo è un numero irrazionale, uno di quei numeri la cui scoperta sconvolse i pitagorici e tolse loro la pace. Di fronte al primo numero irrazionale incontrato, anche Pitagora deve aver detto: "Lo vedo, ma non ci credo." come George Cantor (1845-1914) 1500 anni dopo, a proposito dei numeri transfiniti.

Conoscendo la frequenza di un semitono, è possibile trovare con precisione la frequenza di ogni nota, con buona pace degli accordatori:

$$\text{frequenza di una nota} = (\text{frequenza del semitono precedente}) \cdot \sqrt[12]{2}$$

Per esempio:

$$\text{Do1} = 32.703 \Rightarrow \text{Do1\#} = \text{Re1}b = 32{,}703 \cdot \sqrt[12]{2} \sim 32.703 \cdot 1.06 \sim 34.648$$

Ed ecco che la rappresentazione grafica della scala "temperata ed equabile"[2] di Werckmeister appare come un'unica curva esponenziale:

[2] "temperata" dal verbo temperare, correggere ed "equabile" dal verbo equalizzare, livellare, stabilizzare.

$$y=(\sqrt[12]{2})^x$$

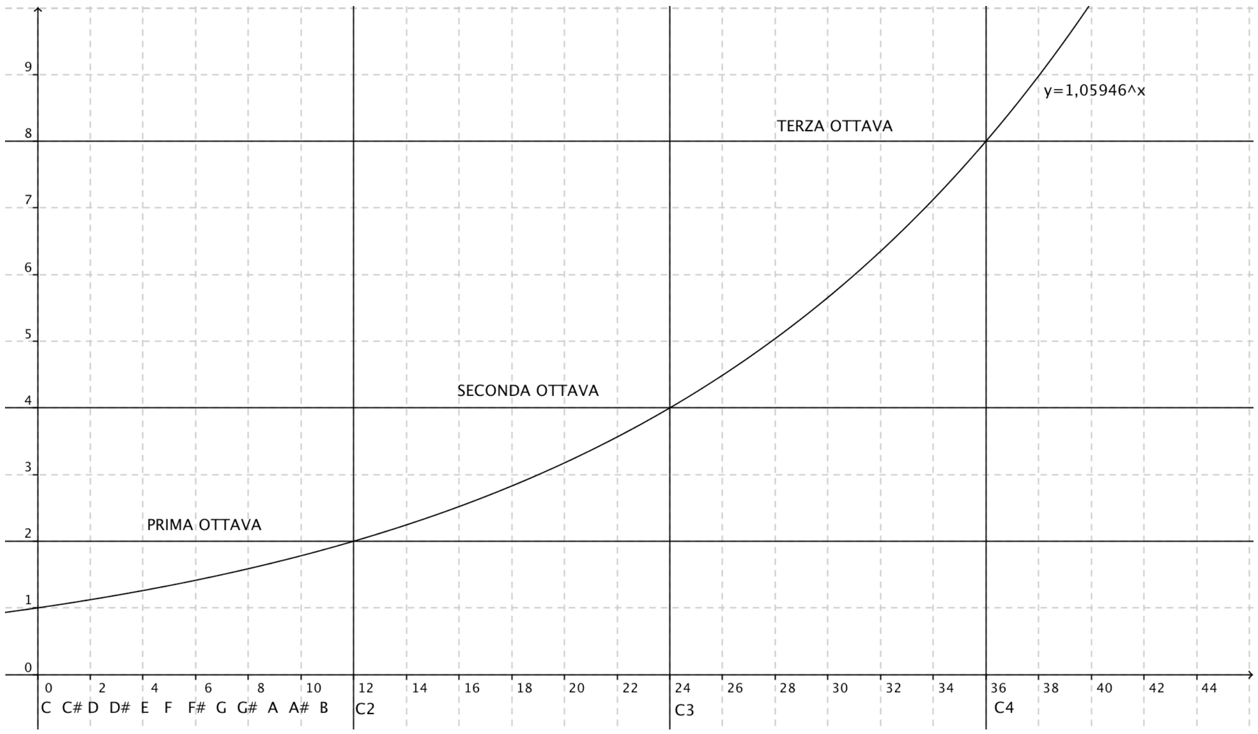

Fig. 13 – La curva esponenziale delle frequenze di tutte le note

Nel grafico sull'asse x è riportata la successione dei semitoni e sull'asse y le loro rispettive frequenze misurate usando come unità di misura la frequenza del Do1. I nomi delle note sono quelli adottati nel mondo anglosassone e ormai universalmente accettati:

C = Do, D = Re, E = Mi, F = Fa, G = Sol, A = La, B = Si

Nella seguente tabella sono messe a confronto le frequenze delle tre scale relativamente all'ottava centrale del pianoforte:

Tab. n.11 – Pitagora, Zarlino e Werckmeister a confronto

Suono	Frequenze della scala di Pitagora	Frequenze della scala naturale di Zarlino	Frequenze della scala temperata equabile di Werckmeister
Do4	130,80 · 2=261,60	261	261,63
Re4	261 · 9/8=293	261 · 9/8=293	293,66
Fa4	261 · 4/3=348	261 · 4/3=348	349,23
Sol4	261 · 3/2=391	261 · 3/2=391	392,00
La4	261 · 27/16=440	261 · 5/3=435	440,00
Si4	261 · 243/128=495	261 · 15/8=489	493,88
Do5	261 · 2=522	261 · 2=522	523,25

Ai nostri giorni l'avvento della musica digitale e la costruzione di strumenti musicali elettronici ha permesso di realizzare, con buona approssimazione, una corrispondenza biunivoca tra i numeri Reali e l'insieme delle frequenze dei suoni naturali o riproducibili artificialmente, a questo punto non solo con buona pace dei musicisti, ma anche dei matematici che già alla fine del 1800 avevano suggerito di usare una unità di misura ancora più piccola per gli intervalli, quella inventata dall'inglese Alexander Ellis:

$$1 \text{ cent} = \sqrt[1200]{2}$$

pari alla centesima parte di un semitono della scala temperata di Werckmeister.
In un sistema metrico della frequenza che usi il cent come unità di misura: un semitono misura 100 cent, un tono misura 200 cent, un'ottava misura 1200 cent. Il fatto poi che l'orecchio umano non sia in grado di percepire differenze di 2 cent e, dal vivo, nemmeno differenze di 10 cent, permette di ottenere arrotondamenti con approssimazioni all'intero più vicino. In questo modo il confronto tra le diverse scale è più immediato e inoltre diventa possibile sincronizzare un sintonizzatore per poter suonare indifferentemente in una delle diverse scale.

Tab. n.12 – Pitagora, Zarlino e Werckmeister in cent

Suono	Frequenze di Pitagora in cent	Frequenze di Zarlino in cent	Frequenze di Werckmeister in cent
Do4	0	0	0
Re4*b*	90	134	100
Do4#	114	70	100
Re4	204	204	200
Mi4*b*	294	316	300
Re4#	318	274	300
Mi4	408	386	400
Fa4*b*	384	428	400
Mi4#	522	456	500
Fa4	498	498	500
Sol4*b*	588	632	600
Fa#	612	568	600
Sol4	702	702	700
La4*b*	792	814	800
Sol4#	816	772	800
La4	906	884	900
Si4*b*	996	1018	1000
La4#	1020	954	1000
Si4	1110	1088	1100
Do5*b*	1086	1130	1100
Si4#	1223	1158	1200

Nonostante da un punto di vista matematico la scala temperata sia più precisa, non ha mai del tutto soppiantato la scala naturale di Zarlino. Gli strumenti ad arco e le corde vocali sono in grado di riprodurre la differenza tra un diesis e un bemole, possibilità questa preclusa agli strumenti a tasti (compreso la chitarra). Nelle orchestre sinfoniche sono gli archi a farla da padrone e si accordano sull'oboe, quindi la scala più adatta per suonare musica classica ancora oggi resta quella naturale di Zarlino. Esattamente come in Matematica la scoperta dei numeri Reali non ha impedito di continuare a usare, secondo le necessità e il contesto, l'insieme dei soli numeri Interi o dei soli Razionali.

Aveva proprio ragione Lorenz Christoph Mizler von Kolof (1711-1778), allievo di Bach, quando affermava:

"La musica è il suono della matematica".

Ringraziamenti

per la consulenza:
Luca Cannatà insegnante di musica (www.musicdayschool.it/);

per la collaborazione al lavoro di gruppo:
gli allievi delle classi 1^T del Liceo Scientifico e 1^G, 1^H, 2^G, 2^H del Liceo Linguistico dell'Istituto C. E. Gadda di Paderno Dugnano (Mi);

Bibliografia

MIUR - "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento."

Luigi Rossi – Teoria Musicale – Edizioni Carrara, Bergamo 1977

Carl B. Boyer – Storia della Matematica – Arnoldo Mondadori Editore, Milano 1990

Bertrand Russel – Storia della filosofia occidentale – TEA, Milano 2006

Sitografia

Rapporto tra Musica e Matematica in:
http://chiriano.thebrain.net/

Strumenti musicali preistorici e la musica degli antichi romani in:
http://www.soundcenter.it/wmcurriculum.htm

La costruzione di un monocordo in:
http://www.youtube.com/watch?v=j4qCc5a3m8w

La tabella delle frequenze musicali in:
http://www.febat.com/Musica/Musica_frequenze_musicali.html

Scale e Sistemi Musicali in:
www.av3.it/Didattica/lezioni/PDF/Scale.pdf

L’equivalenza tra hertz e cent in:
http://web.tiscali.it/gabrieletalevi/scale_musicali.htm